Tecniche di quadratura prima del calcolo

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 27 Supplemento n.1, 2017
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Tecniche di quadratura prima del Calcolo

Veronica Gavagna
Università di Firenze, Dipartimento di matematica e informatica (DIMAI)

E-mail: veronica.gavagna@unifi.it

Abstract/Riassunto. Questo contributo intende offrire un breve saggio di alcune tecniche, antecedenti all'invenzione del Calcolo integrale, sviluppate per determinare l'area delle figure piane. Viene preso in esame l'esempio della geometria di misura greca, distinguendo tra quadratura di figure rettilinee e di figure curvilinee. Nel primo caso Euclide risolve completamente il problema nei primi due libri degli *Elementi*; nel secondo non è possibile individuare un metodo veramente generale, ma solo una serie di tecniche *ad hoc* per le figure considerate. L'esempio che viene analizzato è la quadratura geometrica della parabola di Archimede.

Semplificando un (bel) po', potremmo distinguere due rami principali della geometria greca: la *geometria di posizione*, che sostanzialmente studiava le curve, e la *geometria di misura*, il cui scopo era quello di determinare aree e volumi rispettivamente di figure piane e solide.

Sarà bene chiarire cosa si intende per misura di una grandezza nell'ambito della geometria speculativa greca, ambito nel quale possiamo contare su un certo numero di testi sopravvissuti, tra cui gli *Elementi* di Euclide e la *Quadratura della parabola* di Archimede, di cui parleremo in questo contributo.

Oggi *misurare* un segmento AB significa assumere un altro segmento u come unità di misura e determinare il numero che esprime il rapporto tra AB e u; questo numero è la lunghezza di AB rispetto all'unità u. Se abbiamo un nuovo segmento CD, basterà ripetere l'operazione per avere la sua lunghezza e così via per ogni ulteriore segmento. Se consideriamo il lato AB e la diagonale AC di un quadrato qualsiasi non è possibile trovare un segmento u, per quanto piccolo si scelga, che sia contemporaneamente sottomultiplo intero di AB e di AC: queste due grandezze si dicono per questo *incommensurabili*. Se assumiamo una qualsiasi unità di misura – e per comodità possiamo assumere come unità proprio il lato AB — il numero che esprime la lunghezza della diagonale AC è il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Nel sistema numerico greco non erano compresi i numeri irrazionali e quindi una simile idea di misura si sarebbe necessariamente trovata prima o poi a fare i conti con questo problema. Molte leggende sono fiorite attorno al problema dell'incommensurabilità e dell'esistenza dei numeri irrazionali[1] e non di rado si è attribuita l'assoluta mancanza di "misurazioni numeriche" degli *Elementi* al timore di Euclide di incappare nei numeri irrazionali. Le fonti storiche non aiutano a stabilire la fondatezza di questo rapporto di causa-effetto[2], per cui non possiamo che prendere atto del fatto che nella geometria di misura greca "la misura delle grandezze, tra le quali figurano in primo

[1] La più famosa è certamente la leggenda che vuole Ippaso di Metaponto ucciso dai membri della setta pitagorica a cui apparteneva proprio per la destabilizzante scoperta dell'esistenza dei numeri irrazionali.

[2] Ad esempio, nessun testo greco di geometria pratica è sopravvissuto fino ai giorni nostri e dunque non è possibile ricostruire come si misurassero le grandezze nella quotidianità.

piano le aree delle figure piane e i volumi dei solidi, non verrà espressa con un numero, ma confrontando la grandezza in questione con altre grandezze simili, in modo da stabilire una rete di relazioni quantitative”[3].

Dunque nei testi che sono arrivati fino a noi non troviamo espressioni come “il volume di un cono retto si determina moltiplicando l’area del cerchio di base per l’altezza e dividendo per 3” ma “un cono retto è la terza parte del cilindro ad esso circoscritto”.

Il problema generale teorico di determinare l’area di una figura piana o il volume di un solido si traduceva, quando era possibile, in un procedimento per costruire - usando solo riga e compasso - un quadrato equiesteso alla figura piana di partenza o un cubo dello stesso volume del solido. Per questo motivo, nella geometria greca si parlava di *quadratura* di una figura piana (cioè “rendere quadrata”) e di *cubatura* di una solida.

1. La quadratura delle figure rettilinee: gli *Elementi* di Euclide

I primi due libri degli *Elementi* sono dedicati alla risoluzione del problema di quadrare una figura rettilinea, che passa attraverso le tappe fondamentali delle proposizioni 42 e 45 del Libro I e 14 del Libro II (ovvero l’ultima)[4]:

I.42 *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale*[5] *a un triangolo dato*

I.45 *Costruire un parallelogrammo uguale a una figura rettilinea data in un angolo dato rettilineo*

II.14 *Costruire un quadrato uguale a una figura rettilinea data*

Il primo passo (I.42) consiste nel costruire, con riga e compasso, un parallelogramma di angoli arbitrari fissati (“in un dato angolo rettilineo”) equiesteso a un triangolo assegnato. Nel caso in cui si considerino angoli retti, si costruirà un rettangolo equivalente al triangolo dato. Nel secondo passo (I.45) si deve costruire un parallelogramma di angoli arbitrari fissati equiesteso a un poligono assegnato. Si suddivide dunque il poligono in triangoli, per ognuno dei quali è possibile costruire un parallelogramma equivalente di angoli fissati (I.42) e per di più la proposizione I.44 consente di costruire questo parallelogramma con una data altezza: a questo punto è facile costruire il parallelogramma equivalente al poligono giustapponendo tutti i parallelogrammi equivalenti ai triangoli in cui esso è scomposto. Se si considerano parallelogrammi con angoli retti, la proposizione I.45 consente di trasformare il poligono dato in un rettangolo equiesteso. Finalmente la II.14 affronta il problema di costruire un quadrato equivalente a un poligono dato: la proposizione I.45 permette di costruire un rettangolo equiesteso al poligono e quindi il problema si riconduce a quello di costruire un quadrato equivalente a un rettangolo dato.

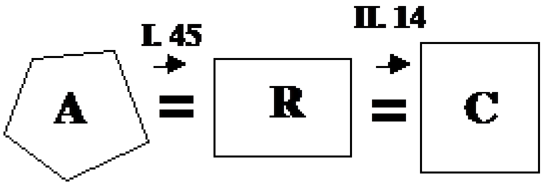
[3] Giusti E. (2007), *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall’antichità al Novecento*, Pisa, Istituti Editoriali e poligrafici internazionali”, p.10.

[4] Gli enunciati che seguono sono tratti da Frajese A., Maccioni L. (1970), *Euclide. Gli Elementi*, Torino UTET.

[5] Oggi diremmo “equiesteso”. Per rimanere aderenti alla lettera del testo euclideo, nelle citazioni puntuali degli *Elementi* conserveremo il termine “uguale”.

Le dimostrazioni di queste proposizioni, che qui non riportiamo per brevità, potrebbero essere proposte agli studenti tramite la lettura dell'edizione degli *Elementi* curata dall'urbinate Federico Commandino (1509-1575). Commandino fu il più importante matematico-filologo del Rinascimento e nel corso del Cinquecento diede alle stampe tutte le maggiori opere matematiche greche, tra cui un'edizione latina degli *Elementi* pubblicata nel 1572, che divenne il testo euclideo di riferimento dell'intera comunità scientifica fino all'Ottocento. Nel 1575 venne pubblicata postuma la traduzione degli *Elementi* in un elegante volgare: si tratta dunque di un testo pregevole sia dal punto di vista matematico sia linguistico, che offre agli studenti la possibilità di confrontarsi con un bell'esempio di prosa scientifica volgare del Rinascimento. Il testo è oggi disponibile gratuitamente su Google Books[6].

Tornando alle proposizioni euclidee, possiamo sintetizzare il percorso che abbiamo illustrato poco sopra con questo diagramma, in cui si evidenzia che la proposizione I.45 riconduce la quadratura di una figura rettilinea qualsiasi a quella di un rettangolo:



La tradizione testuale degli *Elementi* di Euclide è molto complessa, ma possiamo almeno distinguere due rami: la tradizione greco-latina e quella arabo-latina[7] che differiscono tra loro (anche) nel numero e nella numerazione delle proposizioni. E' interessante constatare che nella tradizione arabo-latina manca la proposizione I.45.

La difformità tra le due tradizioni offre al docente sia la possibilità di accennare all'esistenza di un'articolata tradizione testuale di un'opera come gli *Elementi*, spesso percepita dagli studenti come inesorabilmente statica e immutata nel corso dei secoli, sia la possibilità di porre un interessante problema aperto: si può costruire un percorso per quadrare le figure rettilinee in cui non si faccia ricorso alla proposizione I.45?

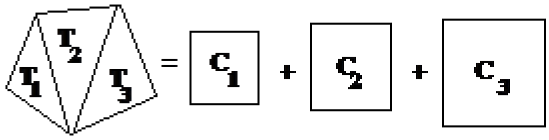
In effetti, la risposta è positiva. Cominciamo con l'osservare che, essendo la proposizione I.42 ancora presente, siamo in grado di trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente. Tuttavia se ora consideriamo un poligono qualsiasi e lo scomponiamo in triangoli, potremo trasformare ogni triangolo in un rettangolo (per la I.42) e ogni rettangolo così ottenuto in quadrato equivalente (per la II.14). Siamo dunque riusciti a trasformare un poligono non in un unico quadrato equivalente, ma in tanti quadrati (quanti sono i triangoli nei quali abbiamo scomposto il poligono), la cui unione forma una figura equiestesa al poligono di partenza. Non abbiamo (ancora) risolto il problema di quadrare il poligono.

Vediamo un caso concreto. Dividiamo il pentagono P nei tre triangoli T_1, T_2 e T_3 e supponiamo di poter costruire dei quadrati rispettivamente equiestesi C_1, C_2 e C_3, la cui unione è equivalente a P:

---

[6] https://books.google.it/books?id=TchCAAAAcAAJ&printsec=frontcover&dq=commandino&hl=it&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=commandino&f=false

[7] Per una storia del testo euclideo si veda ad esempio l'*Introduction générale* di M.Caveing all'edizione *Euclide. Les Éléments* curata da B.Vitrac, Paris, Presses Universitaire de France 1990-2001; V.Gavagna, Presentazione *Testi classici: Euclide, "Gli Elementi"*, Secondo Convegno Nazionale *La storia della matematica in classe*, Ivrea 14-16 marzo 2013, http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/materiali/gavagna.pdf



Per risolvere completamente il problema di quadratura, bisogna allora risolvere il seguente sotto-problema: come costruire un quadrato equivalente ai tre quadrati C_1, C_2 e C_3?

Prima di arrivare a dare la risposta, consideriamo un caso più semplice: dati due quadrati è possibile costruire con riga e compasso un quadrato ad essi equiesteso?

La risposta si trova in una delle più famose proposizioni degli *Elementi* di Euclide, la penultima del primo libro (I.47) meglio nota come *Teorema di Pitagora*.

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto è uguale ai quadrati costruiti sui lati che contengono l'angolo retto.

Se vogliamo dunque "sommare"[8] i due quadrati C_1 e C_2, basta disporre i lati in modo che risultino cateti di un triangolo rettangolo: il quadrato C costruito sull'ipotenusa sarà equivalente ai due quadrati dati.

Se vogliamo aggiungere il terzo quadrato C_3, basta considerare un nuovo triangolo rettangolo i cui cateti siano il lato del quadrato C e il lato del quadrato C_3: il quadrato costruito sulla nuova ipotenusa è dunque equivalente ai quadrati C_1, C_2 e C_3. Forzando un po' potremmo considerare il teorema di Pitagora come una sorta di macchina matematica in grado di costruire, con *n-1* iterazioni, un quadrato equiesteso a *n* quadrati dati.

Il teorema di Pitagora, soprattutto nella tradizione arabo-latina priva della proposizione I.45, diventa dunque un tassello fondamentale per risolvere il problema della quadratura delle figure rettilinee. Questo problema era quindi completamente risolto già nel III secolo a.C.

2. La quadratura delle figure curvilinee: la *Quadratura della parabola* di Archimede

Il procedimento che abbiamo visto finora non funziona molto bene con le figure curvilinee: per quanto si cerchi di scomporre una figura curvilinea in regioni rettilinee, rimane sempre fuori qualcosa!

Occorre dunque cercare strategie diverse: nell'Antichità, Archimede costruì un repertorio di tecniche euristiche che gli consentì di determinare, ad esempio, l'area del segmento parabolico, il volume della sfera, del paraboloide di rotazione, dell'iperboloide di rotazione e dell'ellissoide.

Tuttavia la tecnica euristica aveva il solo scopo di congetturare a quale figura *B* (o a quale parte *C* della figura *B*) fosse equiestesa la figura data *A*, ma non aveva valore dimostrativo. Per provare rigorosamente l'equivalenza di *A* e *B* (o *C*) si ricorreva alla tecnica della doppia riduzione all'assurdo, ovvero si dimostrava che *A* non poteva essere maggiore di *B* (o *C*), né *B* (o *C*) maggiore di *A* e dunque concludeva che necessariamente *A* era equiesteso a *B* (o a *C*).

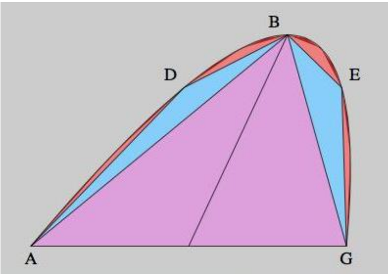
A titolo di esempio, vediamo la *Quadratura della parabola* di Archimede[9], opera nella quale si prova che un segmento parabolico equivale ai 4/3 del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento parabolico, il quale dunque si può effettivamente quadrare. Le proposizioni 1-5 descri-

[8] Il termine "sommare" è molto ambiguo: cosa significa sommare due quadrati?

[9] Il titolo è certamente apocrifo, perché il termine parabola (così come ellisse e iperbole) è stato coniato dal matematico Apollonio, vissuto dopo Archimede. Inoltre nel testo archimedeo non si parla mai di parabola ma di "sezione di cono rettangolo".

vono alcune proprietà della parabola, le proposizioni 6-17 illustrano la "quadratura meccanica" mentre le proposizioni 18-24 la "quadratura geometrica", che è quella che esamineremo attraverso una breve descrizione delle tappe più significative[10].

L'idea di Archimede è quella di costruire un poligono inscritto al segmento parabolico che lo approssimi arbitrariamente[11] e di valutare l'area di questo poligono. Il primo passo è quello di inscrivere un triangolo *ABG* che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento parabolico: "sottraendo" dal segmento parabolico il triangolo si ottengono due segmenti parabolici *BA* e *BG* nei quali è possibile inscrivere nuovamente due triangoli *BDA* e *BEG* che a loro volta hanno la stessa base e la stessa altezza e così via … all'n-esimo passo si costruiranno 2^{n-1} triangoli che, considerati assieme ai triangoli costruiti nei passi precedenti, costituiranno il poligono approssimante.



Proposizione 21

Se in un segmento [parabolico] *compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo si inscrive un triangolo avente la stessa base del segmento e la stessa altezza, e se si inscrivono altri triangoli nei segmenti residui, aventi la stessa base di [detti] segmenti e la stessa altezza, il triangolo inscritto nell'intero segmento sarà ottuplo di ciascuno dei triangoli inscritti nei segmenti residui.*

La proposizione 21 stabilisce anche che ogni "nuovo" triangolo è pari a $\frac{1}{8}$ del triangolo precedente e questo ci permette di valutare l'area del poligono approssimante ad ogni passo. Vediamo come.

Usiamo un linguaggio moderno e immaginiamo di indicare con T_0 il primo triangolo *AGB*.

Al secondo passo costruiamo i due triangoli *BEG* e *BDA*, che indichiamo con T_1. Sappiamo che

$$T_1 = \frac{1}{8} T_0$$

e quindi, se li consideriamo entrambi, la loro area espressa in funzione di T_0 sarà

$$2T_1 = \frac{2}{8} T_0 = \frac{1}{4} T_0$$

Al terzo passo costruiamo $2^2 = 4$ nuovi triangoli T_2, ognuno dei quali sarà 1/8 del triangolo T_1 costruito al passo precedente, cioè

$$T_2 = \frac{1}{8} T_1 = \frac{1}{8^2} T_0$$

Se consideriamo l'area di tutti i quattro triangoli T_2 in funzione di T_0 otteniamo

$$4T_2 = \frac{2^2}{8^2} T_0 = \frac{1}{4^2} T_0$$

Immaginiamo di proseguire ancora nello stesso modo: al passo $(n+1)$-esimo, avremo 2^n triangoli T_n di area $\frac{1}{8^n} T_0$ perciò la loro area totale sarà pari a

$$\frac{1}{4^n} T_0$$

Al passo $(n+1)$-esimo, il poligono approssimante sarà dunque pari a

---

10 Nel sito http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/QuadraturaParabolae/QP.contents.html.è possibile trovare un'interessante presentazione della quadratura della parabola e le proposizioni archimedee (in inglese).

11 Senza entrare nei dettagli della dimostrazione, la proposizione 20 garantisce infatti che iterando il procedimento, si può arrivare a costruire un poligono tale che la differenza tra il segmento parabolico e il poligono sia minore di qualsiasi quantità fissata.

$$T_0 + \frac{1}{4}\, T_0 + \frac{1}{4^2}\, T_0 + \ \dots + \frac{1}{4^n}\, T_0$$

Un matematico moderno troverebbe molto familiare l'espressione scritta sopra e non avrebbe esitazioni a definirla come *la somma parziale n+1-sima di una serie geometrica di ragione* $\frac{1}{4}$ *e termine iniziale* T_0. Non solo: gli strumenti del calcolo infinitesimale gli consentirebbero subito di dire che la serie converge a $\frac{4}{3}\, T_0$.

Ma Archimede non conosceva il calcolo infinitesimale, perché sarebbe stato inventato solo alla fine del XVII secolo indipendentemente da Leibniz e Newton… ciononostante risolse più che brillantemente la situazione.

Cominciò col dimostrare la Proposizione 23:

Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della seguente], *tutte le grandezze* [sommate insieme] *più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore.*

I termini della somma vista sopra sono esattamente nel rapporto richiesto e quindi possiamo applicare questa proposizione, che tradotta nel simbolismo moderno diventa:

$$T_0 + \frac{1}{4}\, T_0 + \frac{1}{4^2}\, T_0 + \ \dots + \frac{1}{4^n}\, T_0 + \frac{1}{3}\, \frac{1}{4^n}\, T_0 = \frac{4}{3}\, T_0$$

L'espressione precedente vuol dire che, a qualsiasi passo di iterazione io mi fermi, se "sommo" tutti i triangoli e aggiungo un "pezzetto" pari a un terzo della "somma" dei triangoli più piccoli ($\frac{1}{4^n}\, T_0$) ottengo sempre la stessa grandezza, cioè $\frac{4}{3}\, T_0$. E si noti che più n è grande, più il poligono approssimante è "vicino" al segmento parabolico P.

Potremmo dire che Archimede ha ormai "indovinato" che il segmento parabolico P è i 4/3 del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza, ma non l'ha ancora dimostrato in maniera rigorosa. E' questo il compito dell'ultima proposizione della *Quadratura della parabola*

Proposizione 24

Qualunque segmento compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo è uguale ai quattro terzi del triangolo avente la sua stessa base e uguale altezza.

Come abbiamo anticipato, Archimede, vincolato anche dall'ingombrante linguaggio della teoria delle proporzioni, non ha gli strumenti per dimostrare direttamente questa uguaglianza. La deve dimostrare per esclusione, con il cosiddetto *metodo di doppia riduzione all'assurdo,* provando cioè che la validità delle relazioni $P > \frac{4}{3}\, T_0$ o $P < \frac{4}{3}\, T_0$ conduce a contraddizioni.

Bibliografia e sitografia

AA.VV. (1999), *Aux origines du calcul infinitesimal*, Collana *Comprendre les mathématiques par les textes historiques*, Cercle d'histoire des sciences, IREM de Basse-Normandie, Ellipses.

Commandino F. (1575), *De gli Elementi di Euclide*, consultabile in https://books.google.it/books?id=Tch-CAAAAcAAJ&printsec=frontcover&dq=commandino&hl=it&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=commandino&f=false (controllato il 14.10.2017)

Frajese A., Maccioni L. (1970), *Euclide. Gli Elementi*, Torino UTET.

Frajese A., a cura di (1974), *Archimede. Tutte le opere*, Torino UTET.

Giusti E. (2007), *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'Antichità al Novecento, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici internazionali*.

Vitrac B., a cura di (1990-2001), *Euclide. Les Éléments*, Paris, Presses Universitaires de France.